

Teoria do Risco

Aula 15

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>



➤ Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES, M.D. Cálculo de prêmios: Propriedades desejáveis. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas> . Acesso em: 28 jun. 2026.

Princípio de cálculo de prêmio

- Princípio do prêmio de risco.

$$\Pi_S = E(S)$$

- Princípio do prêmio carregado baseado no valor esperado

$$\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$$

- Princípio da variância

$$\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$$

- Princípio do Desvio padrão

$$\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta \quad \beta > 0$$

- Princípio da utilidade nula.

$$\mu_{S.a.}(W) = E[\mu_{S.a.}(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu_{S.o.}(W - G) = E[\mu_{S.o.}(W - S)]$$

- Princípio do percentil

$$F_S(\Pi_S) = P(S \leq \Pi_S) = \alpha$$

A defesa da utilização de um princípio em detrimento dos outros é geralmente feita com base em propriedades que se consideram desejáveis...

Propriedades

- Carregamento não-negativo.

$$\Pi_S \geq E(S)$$

Para uma carteira pequena ou uma única exposição, cobrar apenas o valor esperado pode produzir elevada probabilidade de resultado técnico negativo, pois não há diversificação suficiente.

- Aditividade.

- Se S_1 e S_2 são independentes, o prêmio para o risco combinado, $\Pi_{S_1+S_2}$, é igual a $\Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

A combinação de riscos tem que gerar um prêmio igual ao somatório dos prêmios quando os riscos são avaliados individualmente.

Propriedades

➤ Escala invariante.

Se $Z = aS$, em que $a > 0$, então $\Pi_Z = a\Pi_S$.

Propriedade desejável quando se lida com a situação de conversão de moedas.

➤ Consistência.

Se $Y = S + c$, em que $c > 0$, então $\Pi_Y = \Pi_S + c$

➤ Perda máxima.

Seja r_S o sinistro agregado (montante de indenizações) máximo para a distribuição S , então $\Pi_S \leq r_S$.

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_S = E(S)$

- *Carregamento não-negativo.*
- *Aditividade.*
- *Escala invariante.*
- *Consistência.*
- Perda máxima

Princípio do prêmio puro de risco $\Pi_S = E(S)$

- *Carregamento não-negativo.*

$$\Pi_S \geq E(S)$$

- *Aditividade.*

$$E(S_1 + S_2) = E(S_1) + E(S_2)$$

- *Escala invariante.*

$$\text{Se } Z = aS, \text{ em que } a > 0, \text{ então } E(Z) = aE(S)$$

- *Consistência.*

$$\text{Se } Y = S + c, \text{ em que } c > 0, \text{ então } E(Y) = E(S) + c$$

- *Perda máxima*

$$\Pi_S \leq r_S$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$

➤ *Carregamento não-negativo.*

$$\begin{aligned}\Pi_S &\geq E(S) \\ E(S)(1 + \theta) &\geq E(S)\end{aligned}$$

➤ *Aditividade.*

$$\begin{aligned}\Pi_{S_1+S_2} &= \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2} \\ E(S_1 + S_2)(1 + \theta) &= E(S_1)(1 + \theta) + E(S_2)(1 + \theta)\end{aligned}$$

➤ *Escala invariante.*

$$\begin{aligned}\Pi_Z &= (1 + \theta)E(Z) = (1 + \theta)E(aS) \\ \Pi_Z &= a(1 + \theta)E(S) \\ \Pi_Z &= a\Pi_S\end{aligned}$$

Princípio do prêmio carregado $\Pi_S = E(S)(1 + \theta)$

➤ *Consistência.*

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então

$$\begin{aligned}\Pi_Y &= (1 + \theta)E(S + c) = (1 + \theta)[E(S) + c], \\ \Pi_Y &> \Pi_S + c.\end{aligned}$$

Como $\Pi_Y \neq \Pi_S + c$, o princípio do prêmio carregado não é consistente.

➤ *Perda máxima*

Dado $P(S = 10) = 0,0000001$, $P(S = 11) = 0,9999999$, logo $r_S = 11$. A depender do valor de $\theta > 0$, tem-se que:

$$\Pi_S = (1 + \theta)E(S) > r_S.$$

Como $\Pi_S > r_S$, essa propriedade não é satisfeita.

Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

➤ *Carregamento não-negativo*

$$E(S) + \text{var}(S)\alpha \geq E(S)$$

➤ *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \text{var}(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + E(S_2) + \alpha \text{var}(S_1) + \alpha \text{var}(S_2),$$

$$E(S_1 + S_2) + \text{var}(S_1 + S_2)\alpha = E(S_1) + \alpha \text{var}(S_1) + E(S_2) + \alpha \text{var}(S_2),$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

➤ *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, em que $a > 0$, então

$$\Pi_Z = E(Z) + \alpha \text{var}(Z) = E(aS) + \alpha \text{var}(aS),$$

$$\Pi_Z = aE(S) + a^2\alpha \text{var}(S),$$

$$\Pi_Z \neq a\Pi_S$$

Princípio da variância $\Pi_S = E(S) + \text{var}(S)\alpha; \quad \alpha > 0$

➤ *Consistência*

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então:

$$\begin{aligned}\Pi_Y &= E(Y) + \alpha \text{var}(Y), \\ \Pi_Y &= E(S + c) + \alpha \text{var}(S + c), \\ \Pi_Y &= E(S) + c + \alpha \text{var}(S), \\ \Pi_Y &= \Pi_S + c.\end{aligned}$$

➤ *Perda máxima*

Dado $P(S = 8) = P(S = 12) = 0,5$ então:

$$\begin{aligned}E(S) &= 10, \\ \text{var}(S) &= 4, \\ \Pi_S &= 10 + 4\alpha.\end{aligned}$$

em que excede 12 quando $\alpha > 0,5$.

Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta$; $\beta > 0$

➤ *Carregamento não-negativo*

$$E(S) + \beta \sigma_S \geq E(S)$$

➤ *Aditividade*

$$E(S_1 + S_2) + \sqrt{\text{var}(S_1 + S_2)}\beta = E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{\text{var}(S_1) + \text{var}(S_2)}$$

$$E(S_1) + E(S_2) + \beta\sqrt{\text{var}(S_1) + \text{var}(S_2)} \neq [E(S_1) + \sigma_{S_1}\beta] + [E(S_2) + \sigma_{S_2}\beta]$$

➤ *Escala invariante*

Dado $Z = aS$, em que $a > 0$, então:

$$\Pi_Z = E(Z) + \beta \sigma_Z = E(aS) + \beta \sqrt{\text{var}(aS)},$$

$$\Pi_Z = aE(S) + \beta \sqrt{a^2 \text{var}(S)},$$

$$\Pi_Z = aE(S) + a\beta \sigma_S,$$

$$\Pi_Z = a\Pi_S$$

Princípio do desvio padrão $\Pi_S = E(S) + \sigma_S \beta$; $\beta > 0$

➤ *Consistência*

Dado $Y = S + c$, em que $c > 0$, então:

$$\begin{aligned}\Pi_Y &= E(Y) + \beta \sqrt{\text{var}(Y)}, \\ \Pi_Y &= E(S + c) + \beta \sqrt{\text{var}(S + c)}, \\ \Pi_Y &= E(S) + c + \beta \sqrt{\text{var}(S)}, \\ \Pi_Y &= \Pi_S + c.\end{aligned}$$

➤ *Perda máxima*

Dado $P(S = 8) = P(S = 12) = 0,5$ então:

$$\begin{aligned}E(S) &= 8 \times 0,5 + 12 \times 0,5 = 10 \\ \text{var}(S) &= (8^2 \times 0,5 + 12^2 \times 0,5) - 10^2 = 104 - 100 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= 2 \\ \Pi_S &= 10 + 2\beta.\end{aligned}$$

Como na prática o valor de β varia entre 1 e 2, Π_S excede 12 quando $\beta > 1$. A propriedade de perda máxima não é satisfeita.



Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➤ *Carregamento não negativo.*

Pela desigualdade de Jensen temos que:

$$E[g(X)] \leq g(E(X)) \rightarrow g''(x) < 0$$

Temos

$$E[\mu(W + \Pi_s - s)] \leq \mu(E(W + \Pi_s - S))$$

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_s - S)] \leq \mu(E(W + \Pi_s - S))$$

$$-\alpha e^{-\alpha W} \leq -\alpha e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]}$$

$$\ln(e^{-\alpha W}) \geq \ln(e^{-\alpha[W + \Pi_s - E(S)]})$$

$$-\alpha W \geq -\alpha[W + \Pi_s - E(S)]$$

$$-W \geq -W - \Pi_s + E(S)$$

$$\Pi_s \geq E(S)$$

➤ *Aditividade*

Em geral o princípio da utilidade zero não é aditivo, mas o princípio quando usado a utilidade exponencial satisfaz tal propriedade.

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln[E(e^{\alpha(S_1+S_2)})]}{\alpha} = \frac{\ln\{E(e^{\alpha S_1})E(e^{\alpha S_2})\}}{\alpha}$$

$$\Pi_{S_1+S_2} = \frac{\ln[E(e^{\alpha S_1})]}{\alpha} + \frac{\ln[E(e^{\alpha S_2})]}{\alpha} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}$$

Princípio da utilidade Zero ou nula $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

➤ *Escala invariante.*

O princípio da utilidade zero não satisfaz a propriedade de escalava invariante. Suponha que $S \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z = aS$, em que $a > 0$. Logo

$$\Pi_S = \frac{\ln[M_S(\alpha)]}{\alpha} = \frac{\ln\left(e^{\frac{\sigma^2 \alpha^2}{2} + \mu \alpha}\right)}{\alpha} = \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha$$

e

$$\Pi_Z = \mu a + \frac{1}{2} \sigma^2 a^2 \alpha \neq a \Pi_S$$

➤ *Consistência*

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

Seja $Y = S + c$, então Π_Y

$$\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_Y - Y)]$$

$$E[\mu(W + \Pi_Y - Y)] = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$$

$$\mu(E(W + \Pi - Y)) = \mu(E(W + \Pi_S - S))$$

Considerando $\mu(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$

$$-\alpha e^{-\alpha[W + \Pi_Y - E(Y)]} = -\alpha e^{-\alpha[W + \Pi_S - E(S)]}$$

$$-\alpha[W + \Pi_Y - E(Y)] = -\alpha[W + \Pi_S - E(S)]$$

$$\Pi_Y - E(Y) = \Pi_S - E(S)$$

$$\Pi_Y = \Pi_S - E(S) + E(S) + c,$$

$$\Pi_Y = \Pi_S + c$$

➤ *Perda máxima.*

Considerando que r_S é a perda máxima, tem-se

$$E[\mu(W + \Pi_S - S)] \geq \mu(W + \Pi_S - r_S)$$

Como $\mu(W) = E[\mu(W + \Pi_S - S)]$, então:

$$\mu(W) \geq \mu(W + \Pi_S - r_S)$$

Como $\mu'(x) > 0$, tem-se que:

$$W \geq W + \Pi_S - r_S$$

$$\Pi_S - r_S \leq 0$$

$$\Pi_S \leq r_S$$

Propriedade	Prêmio de Risco	Carregado	Variância	Desvio padrão	Utilidade zero
Carregamento ≥ 0	✓	✓	✓	✓	✓
Aditividade	✓	✓	✓	✗	✓ _(exponencial)
Escala Invariante	✓	✓	✗	✓	✗
Consistência	✓	✗	✓	✓	✓
Perda Máxima	✓	✗	✗	✗	✓

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

P_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	P_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	100	200	300	X_2	0	10	200	3000

De acordo com o enunciado os “valores pagos por cada sinistro” são dados pelos valores assumidos em X_1 e X_2 . Calcule o que se pede

a) $\Pi_{X_1} = E(X_1)$ e $\Pi_{X_2} = E(X_2)$

b) $\Pi_Z = (1 + \theta)E(Z)$, sendo que $Z = 0,5X_1$ e $\theta = 0,03$

c) $\Pi_Z = E(Z) + \text{var}(Z)\alpha$, sendo que $Z = 0,5X_2$ e $\alpha = 0,01$

d) $\Pi_{X_2} = \frac{\ln[M_{X_2}(\alpha)]}{\alpha}$

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

P_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1
X_1	0	100	200	300
P_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_2	0	10	200	3000

De acordo com o enunciado os “valores pagos por cada sinistro” são dados pelos valores assumidos em X_1 e X_2 . Calcule o que se pede

a) $\Pi_{X_1} = E(X_1)$ e $\Pi_{X_2} = E(X_2)$

$$\Pi_{X_1} = \sum x_{1i} p(x_{1i}) = 80$$

$$\Pi_{X_2} = \sum x_{2i} p(x_{2i}) = 162$$

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

P_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1
X_1	0	100	200	300
P_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_2	0	10	200	3000

a) $\Pi_{X_1} = E(X_1)$ e $\Pi_{X_2} = E(X_2)$

$$\Pi_{X_1} = \sum x_{1i} p(x_{1i}) = 80 \text{ e } \Pi_{X_2} = \sum x_{2i} p(x_{2i}) = 162$$

b) $\Pi_Z = (1 + \theta)E(Z)$, sendo que $Z = 0,5X_1$ e $\theta = 0,03$

$$\Pi_Z = (1,03)E(0,5X_1) = 0,515 \times 80 = 41,2$$

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

P_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	P_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	100	200	300	X_2	0	10	200	3000

a) $\Pi_{X_1} = E(X_1)$ e $\Pi_{X_2} = E(X_2)$

$$\Pi_{X_1} = \sum x_{1i} p(x_{1i}) = 80 \text{ e } \Pi_{X_2} = \sum x_{2i} p(x_{2i}) = 162$$

b) $\Pi_Z = (1 + \theta)E(Z)$, sendo que $Z = 0,5X_1$ e $\theta = 0,03$

$$\Pi_Z = (1,03)E(0,5X_1) = 0,515 \times 80 = 41,2$$

c) $\Pi_Z = E(Z) + \text{var}(Z)\alpha$, sendo que $Z = 0,5X_2$ e $\alpha = 0,01$

$$\Pi_Z = 0,5E(X_2) + 0,5^2 \text{var}(X_2)0,01 = 1145,44$$

EXEMPLO 1: Considere uma carteira com as seguintes funções de probabilidades:

P_{X_1}	0,5	0,3	0,1	0,1	P_{X_2}	0,7	0,2	0,05	0,05
X_1	0	100	200	300	X_2	0	10	200	3000

...

$$d) \Pi_{X_2} = \frac{\ln[M_{X_2}(\alpha)]}{\alpha}, \text{ sendo } \alpha = 0,1$$

$$M_{X_2}(\alpha) = E(e^{X_2\alpha}) = 0,7 + 0,2e^{10\alpha} + 0,05e^{200\alpha} + 0,05e^{3000\alpha}$$

$$\Pi_{X_2} = \frac{\ln[M_{X_2}(0,1)]}{0,1} \approx 2970,043$$

Princípio de cálculo de prêmio

- O princípio do prêmio puro de risco não é aplicável pois conduz a ruína.
- O princípio da variância leva valores de prêmios muito elevados
 - Pouco competitivo
- ...
- A opção por um princípio de cálculo de prêmio sobretudo é
 - Uma escolha subjetiva de quem decide
 - A importância a que se atribuiu a determinada propriedade

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras:Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV 2020.

